Álgebra Linear

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2016.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Matriz diagonal é uma matriz quadrada

$A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Matriz triangular inferior é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Matriz triangular superior é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Matriz simétrica é uma matriz quadrada A tal que $A = A^T$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Ex: Encontre todos os valores de a, b e c para os quais A é simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a - 2b + 2c & 2a + b + c \\ 3 & 1 & a + c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

$$\begin{cases} a - 2b + 2c = 3 \\ 2a + b + c = 0 \\ a + 0b + c = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 - L1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 - 2L1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{5L3 - 2L2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 + 3L3}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{L1 - 2L3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 29 \\ 0 & 5 & 0 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 / 5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{L1 + 2L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Ex: Encontre uma matriz diagonal A tal que

$$A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$$

$$A^{-2} = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1/a^2 = 9 \\ 1/b^2 = 4 \\ 1/c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1/9 \\ b^2 = 1/4 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1/3 \\ b = \pm 1/2 \\ c = \pm 1 \end{cases}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Ex: Encontre uma matriz triangular superior que satisfaz

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 35 \\ 0 & -27 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & a^2b + abc + bc^2 \\ 0 & c^3 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} a^3 = 1 \\ a^2b + abc + bc^2 = 35 \\ c^3 = -27 \end{cases}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

$$\begin{cases} a^3 = 1 \\ a^2b + abc + bc^2 = 35 \\ c^3 = -27 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ a^2b + abc + bc^2 = 35 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3b + 9b = 35 \\ c = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = -3 \end{cases}$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Determinante de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$ Definimos

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Ex.: Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ Então, $\det(A) = 1\times 3 - 1\times 2$

$= 3 - 2 = 1$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Determinante de uma matriz 3 x 3 – Regra de Sarrus (Pierre Frédéric Sarrus)

Seja A uma matriz quadrada de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$ Definimos det(A) =

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Regra de Sarrus

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Regra de Sarrus

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Ex.: Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Então, det(A) = 1x5x9 + 2x6x7 + 3x4x8

– 3x5x7 – 1x6x8 – 2x4x9 =

= 45 + 84 + 96 – 105 – 48 – 72 = 0

Álgebra Linear

Calculando determinante através de redução por linhas

Teorema: Seja A uma matriz quadrada.

(a) Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(A) = 0$

(b) $\det(A) = \det(A^T)$

Álgebra Linear

Teorema: Se A é uma matriz quadrada triangular n x n, então

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}$$

Álgebra Linear

Teorema: Seja A uma matriz n x n.

(a) Se B é a matriz que resulta quando uma única linha ou uma única coluna de A é multiplicada por um escalar k, então det(B) = k det(A)

(b) Se B é a matriz que resulta quando duas linhas ou duas colunas de A são permutadas, então det(B) = – det(A)

(c) Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a outra linha, então det(B) = det(A)

Álgebra Linear

(d) Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a outra coluna, então det(B) = det(A)

Teorema: Se A é uma matriz quadrada n x n com duas linhas ou duas colunas proporcionais, então det(A) = 0.

Álgebra Linear

Notação: Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Ex.: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$

as colunas 1 e 3 foram permutadas;

Álgebra Linear

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

7 vezes a última linha foi somada a primeira

Ex.: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Álgebra Linear

Calculando determinante através de redução por linhas

Ex.: Calcule det(A), onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

Álgebra Linear

$$= \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$-3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = -3 \times 1 \times 1 \times (-55) = 165$$

Álgebra Linear

Se você quer transformar o mundo, experimente primeiro promover o seu aperfeiçoamento pessoal e realizar inovações no seu próprio interior. Estas atitudes se refletirão em mudanças positivas no seu ambiente familiar. Deste ponto em diante, as mudanças se expandirão em proporções cada vez maiores. Tudo o que fazemos produz efeito, causa algum impacto (Dalai Lama).

Álgebra Linear

Se existe amor, há também esperança de existirem verdadeiras famílias, verdadeira fraternidade, verdadeira igualdade e verdadeira paz. Se não há mais amor dentro de você, se você continua a ver os outros como inimigos, não importa o conhecimento ou o nível de instrução que você tenha, não importa o progresso material que alcance, só haverá sofrimento e confusão no cômputo final. O homem vai continuar enganando e subjugando outros homens, mas insultar ou maltratar os outros é algo sem propósito. O fundamento de toda prática espiritual é o amor. Que você o pratique bem é meu único pedido (Dalai Lama).