

Álgebra Linear

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2016.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Álgebra Linear

E-mails:

damasceno12@hotmail.com

damasceno12@uol.com.br

damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info

damasceno.info

Álgebra Linear

Módulo I – Operações sobre matrizes

Multiplicação de matrizes

$\text{Dim}(A) = m \times k$, $\text{Dim}(B) = k \times n$

$\text{Dim}(AB) = m \times n$

$$\text{Ex.: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Operações sobre matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 28 & 21 & 32 \\ 11 & 14 & 07 & 21 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$12 = 1 \times 3 + 2 \times 2 + 5 \times 1$$

$$11 = 3 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1$$

$$28 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 5 \times 4$$

$$14 = 3 \times 2 + 0 \times 3 + 2 \times 4$$

Álgebra Linear

Módulo I – Operações sobre matrizes

Ex.: Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 grammas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 grammas de B. Usando matrizes podemos determinar quantos grammas dos insumos A e B são necessários na produção de x kg do produto X, y kg do produto Y e z kg do produto Z.

Álgebra Linear

Módulo I – Operações sobre matrizes

$$\begin{array}{l} \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \end{array} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] & = & A \end{array}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array}$$

$$AX = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + y + 4z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \end{array}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes

Forma matricial de um sistema linear

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes

Forma matricial de um sistema linear

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes. Forma matricial de um sistema linear

Ex.:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = 10 \\ 3x - 5y + 2z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 3y - 7z \\ 3x - 5y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes

Transposta de uma matriz: A^T

Definição: Se A é uma matriz $m \times n$ qualquer, então a transposta de A , denotada por A^T , é a matriz onde a primeira linha de A^T é a primeira coluna de A , a segunda linha de A^T é a segunda coluna de A , a terceira linha de A^T é a terceira coluna de A , e assim por diante

$$\text{Ex.: Se } A = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \text{ então } A^T = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ então } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz transposta

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ então } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Propriedades da transposta

$$(1) \quad (A^T)^T = A$$

$$(2) \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(3) \quad (A - B)^T = A^T - B^T$$

$$(4) \quad (kA)^T = kA^T$$

$$(5) \quad (AB)^T = B^T A^T$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes

Traço de uma matriz

Se A é uma matriz quadrada, então o traço de A , denotado por $\text{tr}(A)$, é definido pela soma dos elementos da diagonal principal.

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

$$\text{Sejam } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então } \text{tr}(A) = 1 + 0 + 2 = 3; \quad \text{tr}(B) = 3 + 3 + 2 = 8$$

Álgebra Linear

Módulo I – Propriedades das matrizes

Ex.: Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Multiplicando AB e BA obtemos

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ o que mostra que}$$

$$AB \neq BA$$

Álgebra Linear

Módulo I – Propriedades das matrizes

Vamos verificar se para matrizes A e B , quadradas, vale a igualdade

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

$$\begin{aligned}(A + B)(A - B) &= (A + B)A + (A + B)(-B) \\ &= AA + BA - AB - BB = A^2 + BA - AB - B^2\end{aligned}$$

Assim, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ se,

e somente se, $BA - AB = 0$, ou seja, $AB = BA$.

Álgebra Linear

Módulo I – Propriedades das matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Para estas matrizes

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^2 = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^2 - B^2.$$

Álgebra Linear

Módulo I – Tipo de matrizes

Matrizes Zero

Uma matriz com todos os seus elementos nulos.

$$[0], \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Propriedades da matriz nula

Propriedades:

$$(1) A + 0 = 0 + A = A$$

$$(2) A - A = 0$$

$$(3) 0 - A = -A$$

$$(4) A 0 = 0 A = 0$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes, Identidade

Uma matriz quadrada com todos os seus elementos nulos para $i \neq j$ e iguais a 1 quando $i = j$.

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

$$(1) A I = I A = A$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A , se pudermos encontrar uma matriz quadrada B de mesmo tamanho tal que $AB = BA = I$, então diremos que A é invertível e que B é uma inversa de A .

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ é uma inversa de } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ pois}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad e$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

Propriedades:

(1) Se B e C são inversas da matriz A, então $B = C$

(2) A matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se $ad - bc \neq 0$.

Neste caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(3) Se A e B são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

Propriedades:

(4) Se A é uma matriz invertível, então A^{-1} é invertível e

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(5) Se A é uma matriz invertível, então kA é invertível e

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

Ex.: Calcule as inversas das seguintes matrizes

$$1) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2) B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 3) C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ex.: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine se A

é invertível e, se for, encontre sua inversa.

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a \times 1 + b \times 0 = 1 \\ a \times 0 + b \times 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c \times 1 + d \times 0 = 0 \\ c \times 0 + d \times 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ b + c = 0 \\ 1 - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ -b + c = -1 \end{cases}$$

$$2c = -1 \Rightarrow c = -0,5$$

$$b - 0,5 = 0 \Rightarrow b = 0,5$$

Irmãos em Perigo

Os que pretendem transformar o próximo, de um dia para outro, a golpes verbais.

Os que descobrem pareceres inteligentes e bons conselhos para todas as pessoas, distraídos dos problemas que lhes são próprios.

Os que colocam a mente em outro mundo, de maneira absoluta, sem atender aos deveres do mundo em que respiram.

Os que permanecem incessantemente preocupados em se defenderem.

Os que fazem dez projetos maravilhosos por dia sem concretizar nenhum deles em dez anos.



Os que reconhecem a grandeza das verdades divinas, mas que jamais dispõem de tempo para cultivá-las, em favor da própria iluminação.

Os que adiam indefinidamente para amanhã o serviço da compreensão e do amor ao próximo.

Os que se sentem senhores exclusivos de todos os trabalhos no campo da caridade, sem distribuir oportunidades de serviço aos outros.

Os que declaram perdoar a ofensa, mas que nunca conseguem esquecer o mal.

Os que encontram ensejo de se entediarem da vida.

* * * André Luiz. (Xavier, Francisco Cândido).