

# Álgebra Linear

Curso de  
Engenharia  
Civil

Período 2016.1

Prof. da Disciplina  
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

# Álgebra Linear

**E-mails:**

[damasceno12@hotmail.com](mailto:damasceno12@hotmail.com)

[damasceno12@uol.com.br](mailto:damasceno12@uol.com.br)

[damasceno1204@yahoo.com.br](mailto:damasceno1204@yahoo.com.br)

**Site:**

[www.damasceno.info](http://www.damasceno.info)

[damasceno.info](http://damasceno.info)

# Álgebra Linear

*Aquele que sabe o que quer já percorreu um longo caminho para alcançá-lo. (Harold Shermam)*

*Aquele que tentou e nada conseguiu é superior àquele que não tentou. (Bud Wilkinson)*

*O segredo do sucesso não é fazer o que se gosta, mas sim gostar do que se faz. (Cecília Meireles)*



*Volta, recolhe teu ser no silêncio que habita tua morada, e lá, começa por ti. O que queres que não podes ter? (Dalai Lama)*

*Não te abandones em lugares onde a luz da tua harmonia não esteja presente. (Dalai Lama)*

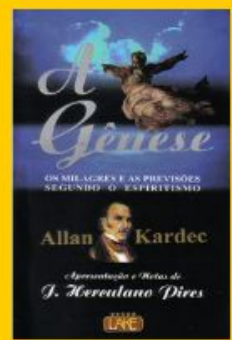
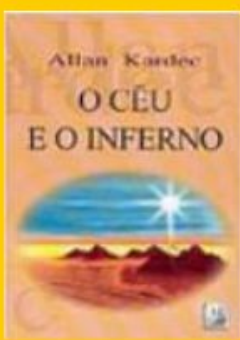
*A viagem mais importante que podemos fazer na vida é encontrar pessoas pelo caminho. (Autor desconhecido)*

*Em Busca da Luz (em manutenção)*

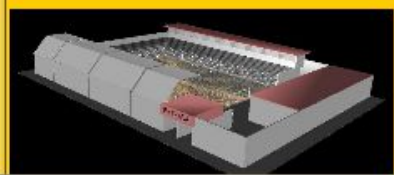
- [Home](#)
- [Contato](#)
- [Quem somos](#)
- [Estudo sistematizado](#)
- [Reuniões](#)
- [Sites espíritas](#)
- [Livros espíritas](#)
- [Mensagens](#)
- [Pensamentos](#)
- 3225**
- [Links Especiais](#)
- [Álgebra Linear](#)
- [Matemática I](#)
- [Computação Gráfica](#)
- [Matemática](#)

Site criado para divulgação de tópicos, textos, pensamentos e mensagens que possam ajudar na educação e formação moral do indivíduo a luz da Doutrina Espírita. Além disso, divulgar também os trabalhos de ensino, extensão e pesquisa desenvolvidos durante os cursos de Matemática, Computação Gráfica e Multimídia.

Livros básicos da Doutrina Espírita: **O EVANGELHO SEGUNDO O ESPIRITISMO - O LIVRO DOS MÉDIUNS - O LIVRO DOS ESPÍRITOS - O CÉU E O INFERNO - A GÊNESE.**



Estudo sistematizado da Doutrina Espírita



Trabalhos desenvolvidos em VRML, 3D Max e Blender por alunos dos Cursos de BSI e Licenciatura em Computação da FARN

>>>>





*Volta, recolhe teu ser no silêncio que habita tua morada, e lá, começa por ti. O que queres que não podes ter? (Dalai Lama)*

*Não te abandones em lugares onde a luz da tua harmonia não esteja presente. (Dalai Lama)*

*A viagem mais importante que podemos fazer na vida é encontrar pessoas pelo caminho. (Autor desconhecido)*

### *Aulas e Listas de Exercícios de Álgebra Linear Período 2011.3*

#### *Álgebra Linear*

##### *Ementa:*

*Matrizes. Vetores. Operação com matrizes e vetores. Inversão de matriz. Sistemas Lineares. Espaço Vetorial. Transformações Lineares.*

##### *Objetivos:*

*Ao final da disciplina o aluno deverá ser capaz de:*

- Fazer uso das estruturas algébricas, matriciais e vetoriais aplicadas à computação;*
- Ter um embasamento lógico para compreensão da modelagem matemática utilizando Sistemas Lineares, para solução de problemas de otimização;*
- Conceituar e manipular Transformações Lineares para uso futuro em Computação Gráfica;*

##### *Plano de Curso*

*[Plano de Curso de Álgebra Linear 2008.1 \(.pdf\)](#)*

##### *Bibliografia*

# Álgebra Linear

## *Ementa:*

Matrizes.

Vetores.

Operação com matrizes e vetores.

Inversão de matriz.

Sistemas Lineares.

Espaço Vetorial.

Transformações Lineares.

# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

### Introdução aos Sistemas de equações lineares

Sist. Eq.

lineares

$$ax + by = c$$

Matriz

coeficientes

$$[ a \ b ]$$

Matriz

aumentada

$$[ a \ b \ c ]$$

Ex.:

$$2x + 3y = 5$$

$$[ 2 \ 3 ]$$

$$[ 2 \ 3 \ 5 ]$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

Ex.:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z - 5w = 10 \\ 3x - 5y + 8z - w = 15 \\ -4x + 6y - z + 3w = 27 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -5 & 8 & -1 \\ -4 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & -5 & 10 \\ 3 & -5 & 8 & -1 & 15 \\ -4 & 6 & -1 & 3 & 27 \end{bmatrix}$$



# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

Definição: Uma matriz  $A$ ,  $m \times n$  ( $m$  por  $n$ ), é um agrupamento retangular de  $mn$  números dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas.

Exs.:  $A = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$   
 $1 \times 1$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$   
 $1 \times 4$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$   
 $3 \times 3$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$   
 $3 \times 2$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

Tamanho de uma matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = [ 2 \ 1 \ 0 \ -3 ]$$

$$D = [-3]$$

$$\text{Dim (A)} = 3 \times 2$$

$$\text{Dim (B)} = 1 \times 4$$

$$\text{Dim (C)} = 3 \times 3$$

$$\text{Dim (A)} = 1 \times 1$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

Simbologia:  $A = (a_{ij})$  onde  $\text{Dim}(A) = m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

A  $i$ -ésima linha de  $A$  é

$$[ a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in} ]$$

A  $j$ -ésima coluna de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

Usamos também a notação  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

Dizemos que  $a_{ij}$  ou  $[A]_{ij}$  é o **elemento** ou a **entrada** de posição  $i, j$  da matriz

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Matriz quadrada de ordem  $n$  é uma matriz onde o número de linhas  $m$  é igual ao número de colunas  $n$ .

$$\text{Ex.: } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ordem } (C) = 3$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

As matrizes  $A$  e  $B$  são  $2 \times 2$ .

A matriz  $C$  é  $2 \times 3$ ,

De acordo com a notação que introduzimos,

$$a_{12} = 2, \quad c_{23} = -2, \quad [A]_{22} = 4.$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$D = [ 1 \quad 3 \quad -2 ] \quad F = [ 3 ]$$

A matriz  $D$  é  $1 \times 3$ ,  $E$  é  $3 \times 1$  e  $F$  é  $1 \times 1$ .

De acordo com a notação que introduzimos,

$$[A]_{22} = 4 \quad [D]_{12} = 3 \quad e_{21} = 4$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

Uma matriz que só possui uma linha é chamada **matriz linha**, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada **matriz coluna**.

No Exemplo anterior a matriz  $D$  é uma matriz linha e a matriz  $E$  é uma matriz coluna.

Matrizes linha e matrizes coluna são chamadas de **vetores**.



# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

Dizemos que duas matrizes são iguais se elas têm o mesmo tamanho e os elementos correspondentes são iguais,

ou seja,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{p \times q}$

são **iguais** se  $m = p$ ,  $n = q$  e  $a_{ij} = b_{ij}$

para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

# Álgebra Linear

## Módulo I – Matrizes e vetores

$$\text{Ex.: } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ se, e somente se, } x = 5$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & z \\ 3 & y & 1 \\ x & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & z & 3 \\ 3 & 1 & y \\ 5 & x & 4 \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$
$$x = 5,$$
$$y = 1,$$
$$z = 3$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Operações sobre matrizes

A **soma** de duas matrizes de **mesmo tamanho**  $A$  e  $B$  é definida como sendo a matriz  $m \times n$   $C = A + B$  obtida somando-se os elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ .

Adição e subtração de matrizes

Sejam  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ . Então

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Operações sobre matrizes

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Operações sobre matrizes

Ex.:

$$\text{Dados } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

encontre  $A + B$  e  $A - B$ .

# Álgebra Linear

## Módulo I – Operações sobre matrizes

### Multiplicação por um escalar

Se  $A$  é uma matriz e  $k$  é um escalar, então o produto  $kA$  é a matriz obtida pela multiplicação de cada elemento da matriz  $A$  por  $k$ .

$$\text{Ex.: } 2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 6 & 0 & -10 \\ -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-1A = ?$$

# Álgebra Linear

## Módulo I – Operações sobre matrizes

### Multiplicação por um escalar

Se  $A$ ,  $B$  são matrizes do mesmo tamanho e  $a$ ,  $b$  são escalares, então uma expressão da forma  $aA + bB$  é chamada de combinação linear de  $A$  e  $B$ .

$$\text{Ex.: Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

então encontre  $2A + 3B$ ,  $2A - 3B$ ,  $-2A - 3B$

# Álgebra Linear

Os meios para que a tua vida seja plena, são dados a ti a cada momento (Dalai Lama) .

A vida está disponível para que possas usufruir do que ela tem de melhor (Dalai Lama) .

Não percas tempo com escolhas que de nada te valerão para evoluir (Dalai Lama) .

Acomodar-se em águas paradas apenas traduz o medo de mudanças, e estas são necessárias para que possamos reencontrar a nossa harmonia, a nossa paz interior (Dalai Lama) .