Álgebra Linear

Bacharelado em Sistemas de Informação

Período 2011.3

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Teorema: *Sejam* U, V *e* W *vetores e* α *um escalar.*

(a) $U \cdot V = V \cdot U$;

(b) $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$;

(c) $\alpha(U \cdot V) = (\alpha U) \cdot V = U \cdot (\alpha V)$;

(d) $V \cdot V = ||V||^2 \geq 0$, *para todo* V *e*

(e) $V \cdot V = 0$ *se, e somente se,* $V = 0$

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Produto vetorial: Dados vetores $\mathsf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathsf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ definimos o *produto vetorial* $\mathsf{U} \times \mathsf{V}$ como o vetor

$$\mathsf{U} \times \mathsf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

onde $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Produto vetorial:

$$U \times V = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, 0, 0 \right) - \left(0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, 0 \right)$$

$$+ \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Propriedades do Produto vetorial:

(1) O vetor $\mathsf{U} \times \mathsf{V}$ é ortogonal aos vetores U e V, isto é, $\mathsf{U} \cdot (\mathsf{U} \times \mathsf{V}) = \mathsf{V} \cdot (\mathsf{U} \times \mathsf{V}) = 0.$

$$\mathsf{U} \cdot (\mathsf{U} \times \mathsf{V}) \quad =$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Propriedades do Produto vetorial:

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) $\mathsf{U} \times \mathsf{V} = -\mathsf{V} \times \mathsf{U}$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Propriedades do Produto vetorial:

(3) $U \times U = 0$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

(4) (U + V) x W = U x W + V x W

(5) (kU) x V = k(U x V), para todo $k \in \mathbb{R}$.

(6) U x V = 0 se, e somente se, os vetores U e V são paralelos (V = kU).

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Propriedades do Produto vetorial:

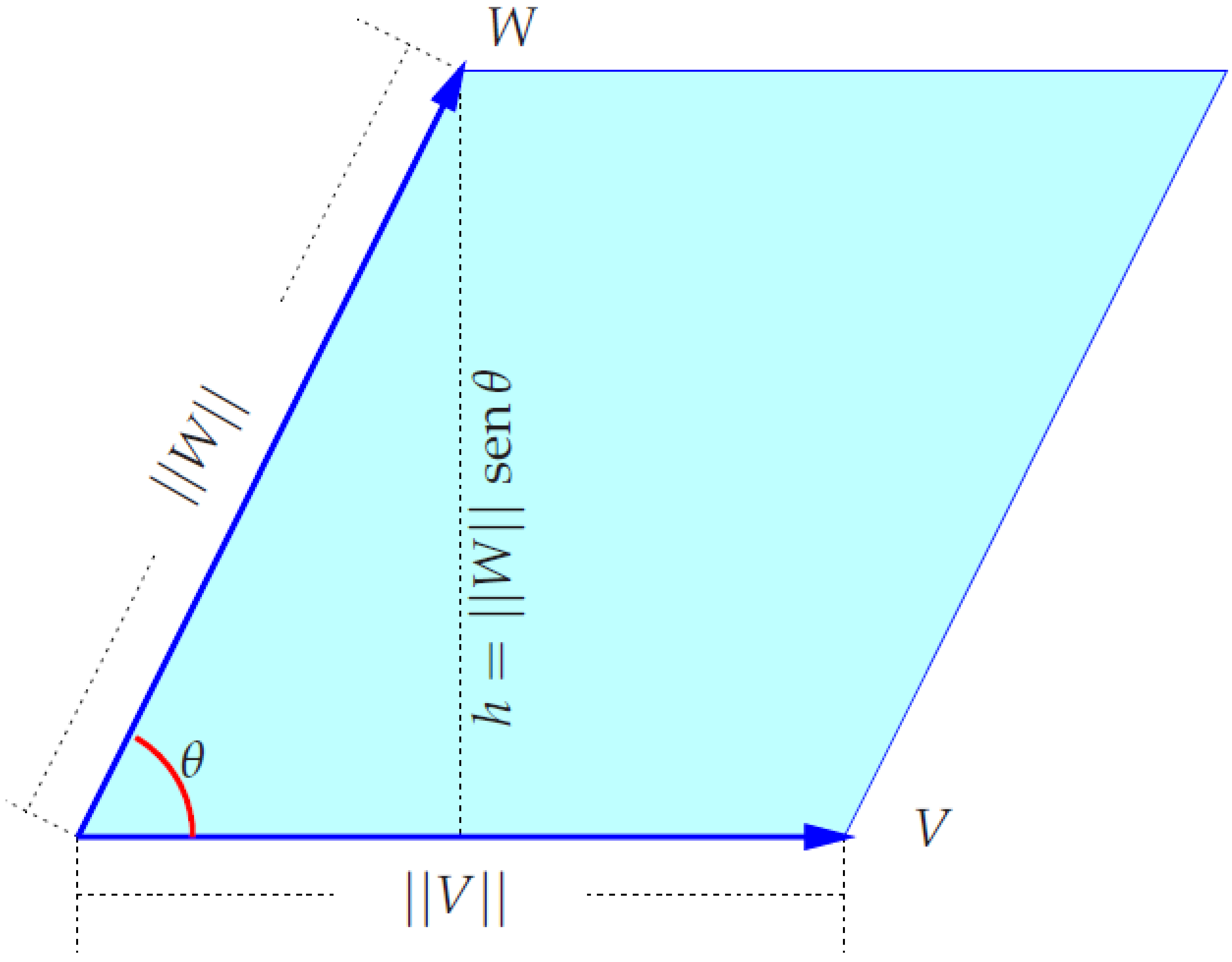
(7) O **módulo do produto vetorial** U x V é a área de um paralelogramo de lados U e V.

$$||\mathsf{U} \times \mathsf{V}|| = ||\mathsf{U}||\ ||\mathsf{V}||\ \mathrm{sen}\, \alpha,$$

onde α é o ângulo entre os vetores U e V.

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

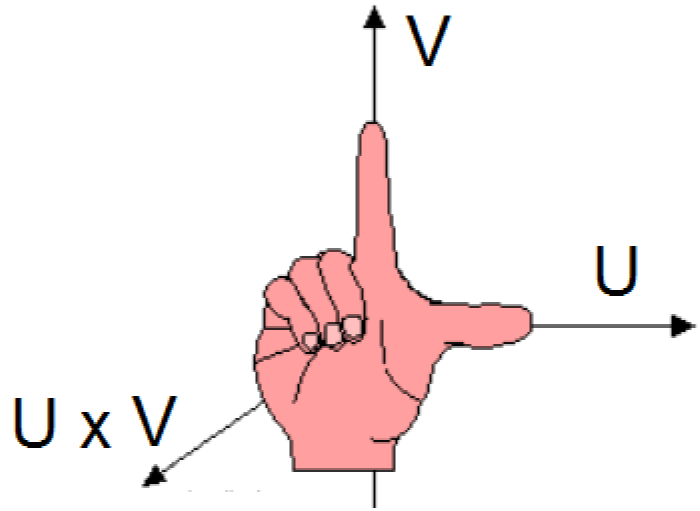


Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Propriedades do Produto vetorial:

Orientação do vetor U x V :



Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Os **vetores canônicos**

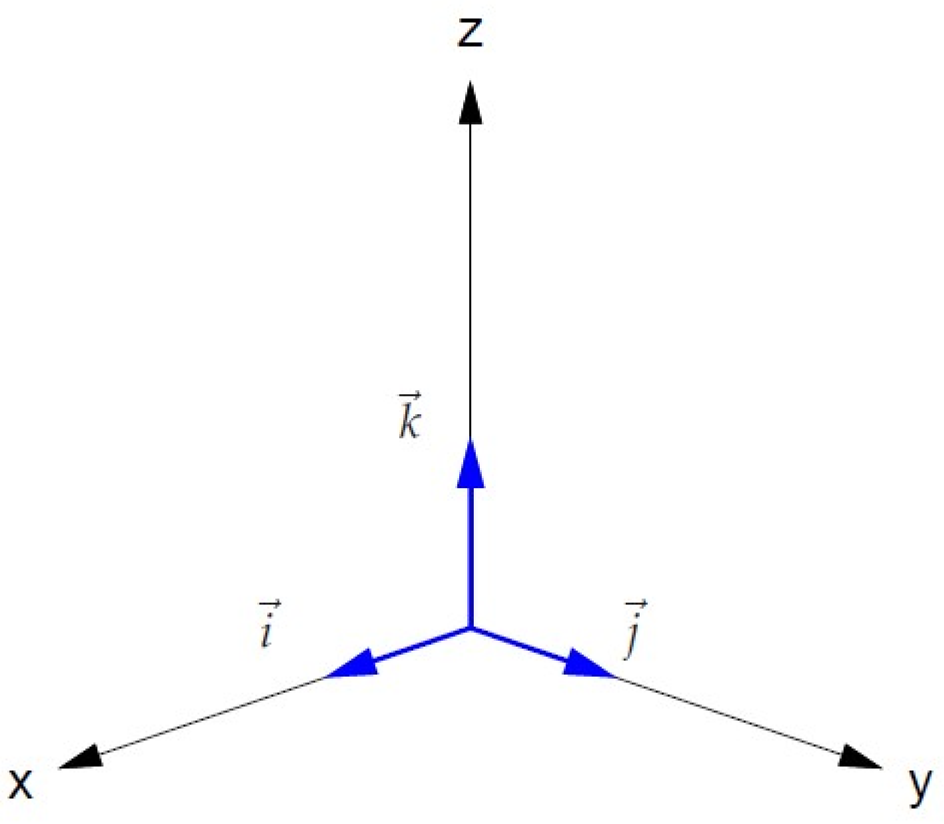
$\vec{i} = (1, 0, 0), \qquad \vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$

são vetores unitários (de norma igual a um) paralelos aos eixos coordenados. Todo vetor $V = (v_1, v_2, v_3)$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$

$$\begin{aligned} V = (v_1, v_2, v_3) = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) &= \\ = \quad v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) &= \\ = \quad v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}. \end{aligned}$$

Álgebra Linear

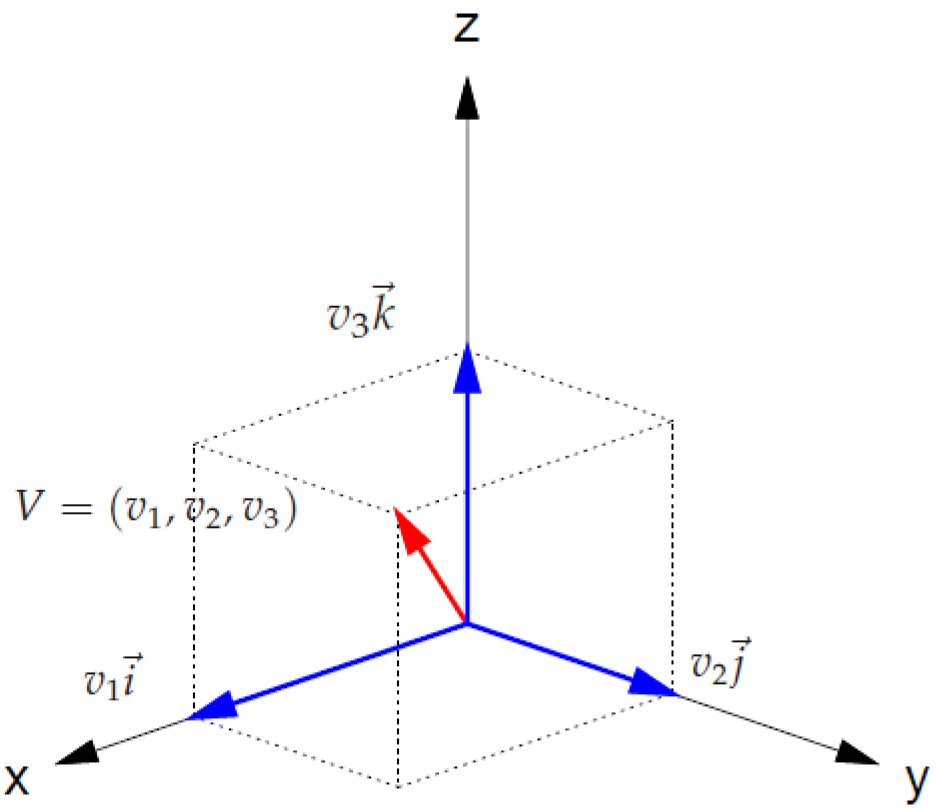
Módulo III – Vetores no plano e no espaço.



Vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.



$$V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Os **vetores canônicos**

$$\vec{i}\times\vec{i}=\bar{0},\quad \vec{j}\times\vec{j}=\bar{0},\quad \vec{k}\times\vec{k}=\bar{0},$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Exemplo: Sejam $V=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ e $W=3\vec{i}+\vec{k}$.

Então

$$V\times W=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-7\vec{j}-6\vec{k}$$

$$=(2,-7,-6)\,.$$

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Exemplo: *Determine a área do paralelogramo de vértices* $(0,0,0)$, $(1,2,3)$ *e* $(2,1,1)$.

A área é igual ao módulo do produto vetorial dos vetores $(1,2,3)$ e $(2,1,1)$. Temos que

$$(1,2,3)\times(2,1,1)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,5,-3).$$

$$\|(-1,5,3)\|=\sqrt{1^{+}5^{2}+3^{2}}=\sqrt{35}.$$

Portanto, a área é $\sqrt{35}$.

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Exemplo: Vamos calcular a área do triângulo PQR em que

$P = (3, 2, 0),\ \ Q = (0, 4, 3)$ e $R = (1, 0, 2).$

$$V = \overrightarrow{RP} = (3-1, 2-0, 0-2) = (2, 2, -2)$$

$$W = \overrightarrow{RQ} = (0-1, 4-0, 3-2) = (-1, 4, 1)\,.$$

$$V \times W = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (10, 0, 10)$$

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Exemplo: Vamos calcular a área do triângulo PQR em que

$$P = (3, 2, 0),\ \ Q = (0, 4, 3)\ \text{ e }\ R = (1, 0, 2).$$

$$V \times W = (10, 0, 10) = 10(1, 0, 1).$$

$$||V \times W||^2 = 100\ (1^2 + 0^2 + 1^2)$$

$$||V \times W|| = 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}||V \times W|| = 5\sqrt{2}.$$

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Produto misto de três vetores: Dados três vetores de $\mathbb{R}^3$

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$

definimos o produto misto $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$ como

$$u \cdot (v \times w) = u \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$u \cdot \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) =$$

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Produto misto de três vetores:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Propriedades do produto misto:

1) *O valor absoluto* $|\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})|$

é o volume do paralelepípedo de arestas $\bar{u}$, $\bar{v}$ *e* $\bar{w}$.

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

2) $u \cdot (u \times v) = 0 = u \cdot (v \times u)$, pois $u \times v$ é ortogonal a u, logo $u \cdot (u \times v) = 0$

3) O produto misto verifica as seguines relações

$$u \cdot (v \times w) = -u \cdot (w \times v) = \; w \cdot (u \times v)$$

(correspondentes a trocar a ordem de colunas em um determinante)

4) $u \cdot (w \times w) = 0 = w \cdot (u \times w)$.

$\mathbf{Exemplo:}$ *Sabendo que* $u \cdot (v \times w) = 2$ *determine*

$$v \cdot (u \times w), \quad w \cdot (u \times v), \quad u \cdot (w \times v).$$

Álgebra Linear

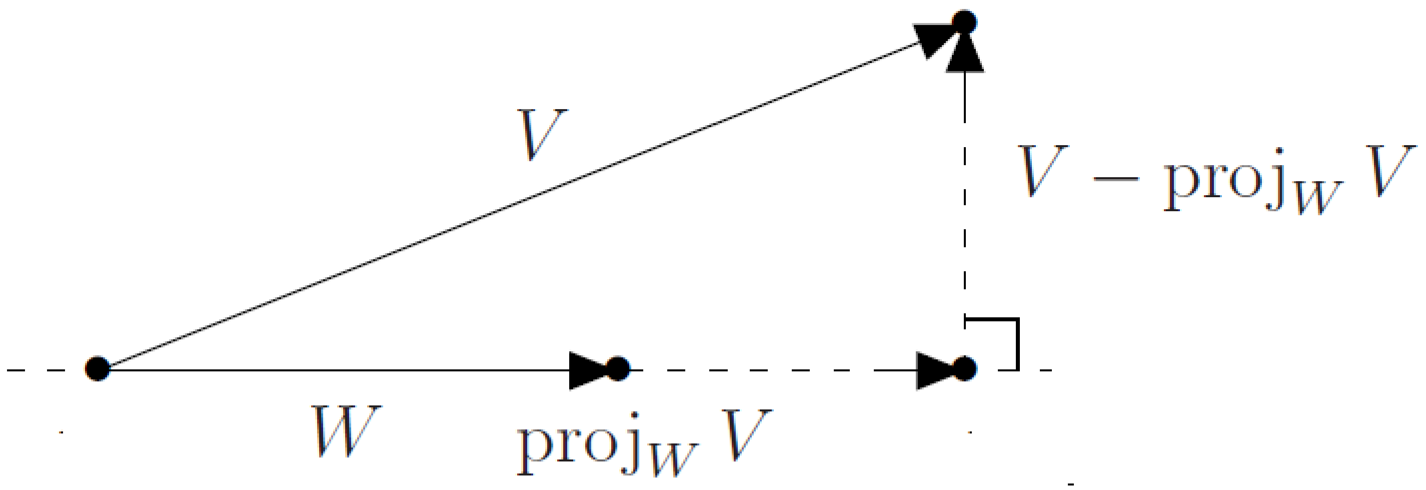
Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Observe que

$$v \cdot (u \times w) = -u \cdot (v \times w) = -2.$$

$$w \cdot (u \times v) = -u \cdot (w \times v) = u \cdot (v \times w) = 2.$$

Projeção Ortogonal



Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Sejam $V_1 = \mathrm{proj}_W V$ e $V_2 = V - \mathrm{proj}_W V$.

$$V_1 = \alpha W.$$

$$V_2 = V - \alpha W\,.$$

$$V_2 \cdot W = (V - \alpha W) \cdot W = V \cdot W - \alpha ||W||^2.$$

Mas, V_2 é ortogonal a W, então $V_2 \cdot W = 0$.

Portanto,
$$\alpha = \frac{V \cdot W}{||W||^2}\,.$$

$$\mathrm{proj}_W V = \; V_1 = \alpha W = \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2}\right) W\,.$$

Álgebra Linear

Módulo III – Vetores no plano e no espaço.

Exemplo : Sejam $V = (2,-1,3)$ e $W = (4,-1,2)$.

Vamos encontrar dois vetores V_1 e V_2 tais que $V = V_1 + V_2$, V_1 é paralelo a W e V_2 é perpendicular a W

Temos que $V \cdot W = 2 \cdot 4 + (-1)(-1) + 3 \cdot 2 = 15$

$$||W||^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21\,.$$

$$V_1 = \mathrm{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2}\right) W = \left(\frac{15}{21}\right)(4,-1,2) = (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7})$$

$$V_2 = V - V_1 = (2,-1,3) - (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}) = (-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7})\,.$$

Álgebra Linear

A matemática da vida

Quando somos estudantes, nem sempre conseguimos atinar com o objetivo de estudar determinadas matérias. É comum se ouvir de garotos e garotas comentários a respeito desta ou daquela matéria, da qual não conseguem vislumbrar necessidade para suas vidas.

Contudo, todo aprendizado pode ser aplicável em nossas vidas. Vejamos, por exemplo, a matemática. Além de nos fornecer facilidade no trato com os cálculos, sem os quais ficaria comprometido o nosso conforto, pois não se poderia construir as maravilhas da engenharia moderna, nem estabelecer relações comerciais com os indivíduos e as nações, verificamos que ela se encontra presente em nossa intimidade.

Álgebra Linear

É graças à matemática que podemos contar as batidas da bomba cardíaca e os movimentos respiratórios para avaliação do estado de saúde ou enfermidade dos indivíduos.

E, na nossa vida moral, podemos utilizar muito das operações aritméticas mais simples.

Assim, podemos subtrair um pouco do conforto de algumas horas e aplicá-las em benefício do próximo. Agindo assim, somamos méritos para nós mesmos.

Se subtraímos o orgulho do nosso coração, somaremos humildade à nossa personalidade e a soma final será grandiosa.

Subtraindo erros das nossas vidas, somaremos mais anos de paz à nossa existência.

Álgebra Linear

Subtraindo a maldade da nossa mente, somaremos amor e bondade à nossa fé, conquistando maior saldo de alegrias.

Quanto mais lutas redentoras, menos dores nos alcançarão na vida.

Quanto mais disposição para a renovação, menos inquietudes em nossas noites.

Quanto mais esforço pessoal, menos desespero em nosso trabalho diário.

Quanto mais amor em nossos dias, menos tortura a nos afligir os corações.

Autor:

Redação do Momento Espírita, baseado no livro Ementário Espírita, de Divaldo Pereira Franco, cap. Na subtração e na soma.