Álgebra Linear

Bacharelado em Sistemas de Informação

Período 2016.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Expansão em co-fatores; Regra de Cramer

Se A é uma matriz quadrada, então o determinante menor do elemento a_{ij}, denotado por M_{ij}, é definido pelo determinante da submatriz que sobra quando a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A são retiradas.

O número $(-1)^{i+j} M_{ij}$, denotado por C_{ij}, é chamado de co-fator de a_{ij}.

Ex.: Encontrando determinantes menores e co-fatores

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Então, $M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 40 - 24 = 16$,

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = (-1)^2 16 = 16$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 8 = 26,$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^5 26 = -26$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Calculando um determinante segundo os seus co-fatores:

Seja A = (a_{ij}) uma matriz n x n. Então

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$ ou

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \ldots + a_{n1}C_{n1}$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Então

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 3(-4) - 1(-11) + 0(12) = -12 + 11 = -1$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Ex.: Calcule det(A) onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Operando com linhas e expandindo em co-fatores,

nós obtemos:

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Matriz adjunta

Se A é uma matriz n x n então a matriz

adj(A) = $(C_{ij})^T$ é chamada de matriz adjunta de A.

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Então $C_{11} = 3$, $C_{12} = -1$,

$C_{21} = -2$, $C_{22} = 1$,

logo adj(A) =transposta($\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$)= $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Então

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \qquad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16 \qquad C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 16$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12 \qquad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

Álgebra Linear

$$C_{11} = 12, \quad C_{12} = 6, \quad C_{13} = -16,$$
$$C_{21} = 4, \quad C_{22} = 2, \quad C_{23} = 16,$$
$$C_{31} = 12, \quad C_{32} = -10, \quad C_{33} = 16$$

logo

$$\text{adj}(A) = \text{transposta}\left(\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Inversa de uma matriz usando a adjunta

Se A é uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, Então adj(A) = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

logo $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

Com a matriz adjunta pode-se calcular a inversa de uma matriz de uma maneira diferente da tradicional, embora não mais rápida.

Álgebra Linear

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, Então

$$C_{11} = 12, \quad C_{12} = 6, \quad C_{13} = -16,$$
$$C_{21} = 4, \quad C_{22} = 2, \quad C_{23} = 16,$$
$$C_{31} = 12, \quad C_{32} = -10, \quad C_{33} = 16$$

logo $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\times 12 - 2\times(-6) + (-1)\times(-16) = 36 + 12 + 16 = 64$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Consideremos um sistema de equações lineares com n equações e n incógnitas, na sua forma genérica:

$$AX = B$$

Seja D o determinante da matriz A formada pelos coeficientes das incógnitas.

Álgebra Linear

Seja D_i o determinante da matriz que se obtém do sistema dado, substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita x_i, pelos termos independentes $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

A regra de Cramer diz que:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad \ldots\ldots \quad x_i = \frac{D_i}{D}$$

Álgebra Linear

Ex.: Considere o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Álgebra Linear

Ex.: Considere o sistema $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

Álgebra Linear

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \qquad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Álgebra Linear

São momentos de decisão!

Há momento na sua vida, que você não aproveita, e passa na inutilidade ou se comprometendo com os erros, que produzem aflições e dores sem conta para você mesmo.

Surgem, também, e ressurgem momentos que o convocam à liberdade, à legítima paz.

Indispensável saber utilizar as lições do evangelho em cada momento da existência física, a fim de poder fruir as bênçãos da vida eterna.

Pense nisso!

Álgebra Linear

A vida lhe oferece, a cada instante, inúmeros momentos para que você tome decisões.

E cada decisão tomada, definirá seu próximo momento.

Se a decisão for feliz, seus momentos futuros lhe trarão felicidade. Se não, as horas seguintes lhe darão notícias desagradáveis.

Assim é a vida: feita de momentos... Momentos de decisão...

Que seja este, portanto, o seu momento de decisão feliz...

Equipe de Redação do Momento Espírita, com base no livro Momento de Decisão, pelo Espírito Marco Prisco, através de Divaldo Franco, ed. LEAL.