Álgebra Linear

Bacharelado em Sistemas de Informação

Período 2016.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Propriedades básicas dos determinantes:

(a) Se A é uma matriz n x n e k um escalar, então

$$\det(kA) = k^{n} \det(A)$$

(b) Se A e B são matrizes quadradas n x n, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Propriedades básicas dos determinantes:

(c) Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$

(d) Se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Sistemas lineares da forma $AX = \lambda X$

$$AX = \lambda X \quad <=> \quad (A - \lambda I)X = 0$$

Os valores de λ para os quais o sistema tem uma solução não trivial ($X = 0$) são chamados de autovalores.

Se λ é um autovalor de A,então cada solução não trivial de $(A - \lambda I)X = 0$ é chamada um autovetor de A associado ao autovalor λ.

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Ex.: Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 3y = \lambda x \\ 4x + 2y = \lambda y \end{cases} \quad <=> \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

$$<=> \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$<=> \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)X = 0$$

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

onde $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

A equação característica de A é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou}$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \qquad <=>$$

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

$$(\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0$$

de modo que os autovalores de A são

$$\lambda = -2 \text{ e } \lambda = 5$$

Por definição $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é um autovetor

de A se, e somente se, X é uma solução não

trivial de $(A - \lambda I)X = 0$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

$$\lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad (A + 2I)X = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = -x \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Exemplo: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinar os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que existe $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \bar{0}$ que satisfaz $AX = \lambda X$.

(b) Para cada um dos valores de λ encontrados no item anterior determinar todos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \bar{0}$ tais que $AX = \lambda X$.

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Solução:

(a) Como a matriz identidade I_3 é o elemento neutro do produto, então $AX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad AX = \lambda I_3 X.$

Subtraindo-se $\lambda I_3 X$ obtemos

$$AX - \lambda I_3 X = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_3)X = \bar{0}.$$

Agora, este sistema homogêneo tem solução não trivial $(X \neq \bar{0})$ se, e somente se, $\det(A - \lambda I_3) = 0.$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Mas

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0$$

se, e somente se, $\lambda = 2$ ou $\lambda = 3$. Assim, para $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ existem vetores $X \neq \bar{0}$ tais que $AX = \lambda X$.

(b) Para $\lambda = 2$:

$$(A - 2I_3)X = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2y & + & 2z & = & 0 \\ y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

que tem solução o conjunto dos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$,

para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Álgebra Linear

Para $\lambda = 3$:

$$(A - 3I_3)X = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & -y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

que tem solução o conjunto dos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$,

para todos os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Álgebra Linear

Se você quer transformar o mundo, experimente primeiro promover o seu aperfeiçoamento pessoal e realizar inovações no seu próprio interior. Estas atitudes se refletirão em mudanças positivas no seu ambiente familiar. Deste ponto em diante, as mudanças se expandirão em proporções cada vez maiores. Tudo o que fazemos produz efeito, causa algum impacto (Dalai Lama).

Álgebra Linear

Se você quer transformar o mundo, experimente primeiro promover o seu aperfeiçoamento pessoal e realizar inovações no seu próprio interior. Estas atitudes se refletirão em mudanças positivas no seu ambiente familiar. Deste ponto em diante, as mudanças se expandirão em proporções cada vez maiores. Tudo o que fazemos produz efeito, causa algum impacto (Dalai Lama).