Álgebra Linear

Bacharelado em Sistemas de Informação

Período 2016.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Determinante de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$ Definimos

$$\det(A) = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Ex.: Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ Então, $\det(A) = 1x3 - 1x2$

$= 3 - 2 = 1$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Determinante de uma matriz 3 x 3 – Regra de Sarrus (Pierre Frédéric Sarrus)

Seja A uma matriz quadrada de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$ Definimos det(A) =

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Regra de Sarrus

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Regra de Sarrus

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Ex.: Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Então, det(A) = 1x5x9 + 2x6x7 + 3x4x8

– 3x5x7 – 1x6x8 – 2x4x9 =

= 45 + 84 + 96 – 105 – 48 – 72 = 0

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Permutações de dois inteiros

Existem 2 = 2! permutações distintas do conjunto $\{1, 2\}$

$\{1, 2\}$ $\{2, 1\}$

O número de inversões na permutação $\{1, 2\}$ é igual a 0

O número de inversões na permutação $\{2, 1\}$ é igual a 1

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Uma permutação é chamada par se o número total de inversões é um inteiro par.

Uma permutação é chamada ímpar se o o número total de inversões é um inteiro ímpar.

{1, 2} é uma permutação par

{2, 1} é uma permutação ímpar

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

Permutações de três inteiros

Existem $6 = 3!$ permutações distintas do conjunto $\{1, 2, 3\}$

$\{1, 2, 3\}$ $\{1, 3, 2\}$ $\{2, 1, 3\}$ $\{2, 3, 1\}$ $\{3, 1, 2\}$ $\{3, 2, 1\}$

O número de inversões na permutação $\{1, 2, 3\}$ é igual a 0

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

O número de inversões na permutação

$\{1, 3, 2\}$ é igual a 1

O número de inversões na permutação

$\{2, 1, 3\}$ é igual a $1 + 0 = 1$

O número de inversões na permutação

$\{2, 3, 1\}$ é igual a $1 + 1 = 2$

O número de inversões na permutação

$\{3, 1, 2\}$ é igual a $2 + 0 = 2$

Álgebra Linear

Módulo II – Determinantes. Menores e co-fatores.

O número de inversões na permutação

$\{3, 2, 1\}$ é igual a $2 + 1 = 3$

$\{1, 2, 3\}$ é uma permutação par

$\{1, 3, 2\}$ é uma permutação ímpar

$\{2, 1, 3\}$ é uma permutação ímpar

$\{2, 3, 1\}$ é uma permutação par

$\{3, 1, 2\}$ é uma permutação par

$\{3, 2, 1\}$ é uma permutação ímpar

Álgebra Linear

Seja A uma matriz quadrada de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Definimos det(A) =

$a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

Observe que as ordens das linhas nos elementos da definição de det(A) permanecem fixas e igual a {1, 2}, enquanto que as ordens das colunas variam em cada parcela, correspondendo a uma permutação de {1, 2}. O sinal de cada parcela é dado pela classificação da permutação corresponde (par ou ímpar).

Álgebra Linear

Seja A uma matriz quadrada de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Definimos det(A) =

$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} -$

$a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Álgebra Linear

O mesmo acontece com det(A), as ordens das linhas nos elementos da definição de det(A) permanecem fixas e igual a {1, 2, 3}, enquanto que as ordens das colunas variam em cada parcela, correspondendo a uma permutação de {1, 2, 3}.

O sinal de cada parcela é dado pela classificação da permutação corresponde (par ou ímpar).

Estas definições podem ser aplicadas para matrizes de ordem n x n, onde n é um inteiro maior ou igual a 2.

Álgebra Linear

Calculando determinante através de redução por linhas

Teorema: Seja A uma matriz quadrada.

(a) Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(A) = 0$

(b) $\det(A) = \det(A^T)$

Álgebra Linear

Teorema: Se A é uma matriz quadrada triangular n x n, então

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}$$

Álgebra Linear

Teorema: Seja A uma matriz n x n.

(a) Se B é a matriz que resulta quando uma única linha ou uma única coluna de A é multiplicada por um escalar k, então det(B) = k det(A)

(b) Se B é a matriz que resulta quando duas linhas ou duas colunas de A são permutadas, então det(B) = – det(A)

(c) Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a outra linha, então det(B) = det(A)

Álgebra Linear

(d) Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a outra coluna, então det(B) = det(A)

Teorema: Se A é uma matriz quadrada n x n com duas linhas ou duas colunas proporcionais, então det(A) = 0.

Álgebra Linear

Notação: Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Ex.: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$

as colunas 1 e 3 foram permutadas;

Álgebra Linear

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

7 vezes a última linha foi somada a primeira

Ex.: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Álgebra Linear

Calculando determinante através de redução por linhas

Ex.: Calcule det(A), onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

Álgebra Linear

$$= \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$-3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = -3 \times 1 \times 1 \times (-55) = 165$$

Álgebra Linear

Ação de Paz

No teu círculo de amigos não faltam aqueles que cultivam a violência, a arrogância, o espírito perturbador... Bulhentos, irrequietos, gostam de promover desordens, sempre armados contra tudo e todos.

Cuidado com eles! Aconselham a anarquia, estimulam as arruaças, encorajam a malquerença. Não te inspires na sua poluição mental, responsável pelo seu comportamento alienado. Trata-os com gentileza, no entanto, poupa-te à sua convivência malfazeja. Eles são cansativos pela instabilidade e exaurem aqueles que os cercam, em razão da agressividade em que se debatem.

Álgebra Linear

Há quem aconselhe revide a qualquer ofensa; reproche a toda insinuação; respostas ácidas às provocações...
O fogo não se acaba, quando se lhe atira combustível.
Assim também acontece com o mal.
A única alternativa é a que decorre da ação do bem, que apaga as labaredas da violência e estabelece a paz na qual o progresso se firma.
És instrumento da vida, para a tua e a felicidade geral.
Esparze alegria, sem fomentar o pandemônio.
Irradia dignidade, sem carantonha ou simulação sisuda.
Favorece a paz, sem pieguismo ou receio da perturbação. Tua realidade íntima, tua forma de vida pessoal. Vive em paz, e apazigua todos quantos se acerquem de ti.
Joanna de Ângelis
Psicografia de Divaldo Pereira Franco.