Álgebra Linear

Bacharelado em
Sistemas de
Informação

Período 2016.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Álgebra Linear

Módulo I – Potência de uma matriz

Se A é uma matriz quadrada, definimos as potências inteiras não negativas de A por

$$A^0 = 1;$$

$$A^2 = A\,A;$$

$$\ldots$$

$$A^n = A\,A\,\ldots\,A$$

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}\,A^{-1}\,\ldots\,A^{-1}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Potência de uma matriz

Ex.: Sejam A e A^{-1} as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$ Então

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Potência de uma matriz

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Expressão polinomial envolvendo matriz

Se A é uma matriz e se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ é um polinômio qualquer, então nós definimos

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + ... + a_nA^n$$

Ex.: Se $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ e

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ então

$P(A) = 2A^2 - 3A + 4I =$

Álgebra Linear

Módulo I – Expressão polinomial envolvendo matriz

$$= 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes elementares

Uma matriz que pode ser obtida da matriz identidade **I** executando uma única operação elementar sobre linhas é chamada uma matriz elementar.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (multiplicando a segunda linha de I_{2x2} por -3)

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes elementares

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(somando 3 vezes a terceira linha de I_{3x3} com a primeira)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(permutando a segunda linha de I_{4x4} com a quarta)

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes elementares.

Ex.: Usando operações sobre linhas para encontrar A^{-1}

Encontre a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Queremos reduzir a matriz A à matriz identidade I por operações sobre linhas e simultaneamente aplicar estas operações a I para produzir A^{-1}.

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes elementares. Achando a inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Somamos -2 vezes a primeira linha a segunda;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes elementares. Achando a inversa.

2) Somamos -1 vezes a primeira linha a terceira;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Somamos 2 vezes a segunda linha a terceira;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes elementares. Achando a inversa.

4) Multiplicamos a terceira linha por -1;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

5) Somamos 3 vezes a terceira linha a segunda;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes elementares. Achando a inversa.

6) Somamos -3 vezes a terceira linha a primeira;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 & 6 & 3 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

7) Somamos -2 vezes a segunda linha a primeira.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes elementares. Achando a inversa.

$$\text{Assim, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes e resolução de sistemas

Resolver o sistema AX = 0 onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Como A é invertível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, temos

Módulo I – Matrizes e resolução de sistemas

$$AX = 0$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}0 \quad => \quad IX = A^{-1}0 \quad =>$$

$$X = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes. Resolução de sistemas lineares

Ex.: Solução de um sistema linear usando A^{-1}

Resolver o sistema $AX = B$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \quad => \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad =>$$

$$IX = A^{-1}B \quad => \quad X = A^{-1}B \quad =>$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes. Resolução de sistemas lineares

$$X = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes. Resolução de sistemas lineares

Ex.: Solução de um sistema linear usando operações sobre linhas

Resolver o sistema AX = B onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes. Resolução de sistemas lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 8 & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 - L1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 - 2L1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 - 2L2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)L3}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes. Resolução de sistemas lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{3L3 + L2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L1 - 2L2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L1 - 3L3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes. Resolução de sistemas lineares

Ex.: Solução de dois ou mais sistemas lineares usando operações sobre linhas

Resolver os sistemas AX = B, AX = C e AX = D onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Operações sobre matrizes

Reduzindo a forma escalonada com o uso de operações sobre linhas obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 17 & 9 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Matriz diagonal é uma matriz quadrada

$A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Matriz triangular inferior é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Matriz triangular superior é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Matriz simétrica é uma matriz quadrada A tal que $A = A^T$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Ex: Encontre todos os valores de a, b e c para os quais A é simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a - 2b + 2c & 2a + b + c \\ 3 & 1 & a + c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz diagonal, triangular e simétrica

Ex: Encontre uma matriz diagonal A tal que

$$A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex: Encontre uma matriz triangular superior que satisfaz

$$A^{3} = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -81 \end{bmatrix}$$