Álgebra Linear

Bacharelado em Sistemas de Informação

Período 2016.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Álgebra Linear

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Módulo I – Operações sobre matrizes

Multiplicação de matrizes

Dim (A) = m x k, Dim (B) = k x n

Dim (AB) = m x n

Ex.: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

Módulo I – Operações sobre matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 28 & 21 & 32 \\ 11 & 14 & 07 & 21 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$12 = 1 \times 3 + 2 \times 2 + 5 \times 1$

$11 = 3 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1$

$28 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 5 \times 4$

$14 = 3 \times 2 + 0 \times 3 + 2 \times 4$

Álgebra Linear

Módulo I – Operações sobre matrizes

Ex.: Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. Usando matrizes podemos determinar quantos gramas dos insumos A e B são necessários na produção de x kg do produto X, y kg do produto Y e z kg do produto Z.

Módulo I – Operações sobre matrizes

$$\begin{array}{l} \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array}$$

$$AX = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + y + 4z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \end{array}$$

Módulo I – Matrizes

Forma matricial de um sistema linear

AX = B

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Módulo I – Matrizes

Forma matricial de um sistema linear

AX = B

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Módulo I – Matrizes

Forma matricial de um sistema linear

AX = B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes. Forma matricial de um sistema linear

Ex.:

$$\begin{cases} 2x+3y-7z=10 \\ 3x-5y+2z=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+3y-7z \\ 3x-5y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes

Transposta de uma matriz: A^T

Definição: Se A é uma matriz m x n qualquer, então a transposta de A, denotada por A^T, é a matriz onde a primeira linha de A^T é a primeira coluna de A, a segunda linha de A^T é a segunda coluna de A, a terceira linha de AT é a terceira coluna de A, e assim por diante

Ex.: Se $A = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

Se $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz transposta

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

Propriedades da transposta

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(3) $(A - B)^T = A^T - B^T$

(4) $(kA)^T = kA^T$

(5) $(AB)^T = B^T A^T$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes

Traço de uma matriz

Se A é uma matriz quadrada, então o traço de A, denotado por tr(A), é definido pela soma dos elementos da diagonal principal.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots a_{nn}$$

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Então $tr(A) = 1 + 0 + 2 = 3$; $tr(B) = 3 + 3 + 2 = 8$

Módulo I – Propriedades das matrizes

Sejam A, B *e* C *matrizes com tamanhos apropriados,* α *e* β *escalares. São válidas as seguintes propriedades para as operações matriciais:*

(a) *(comutatividade)* $A + B = B + A$;

(b) *(associatividade)* $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(c) *(elemento neutro) A matriz* $\bar{0}$, *é tal que*

$$A + \bar{0} = A,$$

A matriz $\bar{0}$ *é chamada* ***matriz nula***

Álgebra Linear

Módulo I – Propriedades das matrizes

(d) *(elemento simétrico) Para cada matriz* A*, existe uma única matriz* $-A$*, tal que*

$$A + (-A) = \bar{0}.$$

(e) *(associatividade)* $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

(f) *(distributividade)* $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(g) *(distributividade)* $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(h) *(associatividade)* $A(BC) = (AB)C$;

Módulo I – Propriedades das matrizes

(i) *(elemento neutro) Para cada inteiro positivo p a matriz,*

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

*chamada **matriz identidade** é tal que*

$$A\,I_n = I_m A = A, \quad \textit{para toda matriz } A$$

Módulo I – Propriedades das matrizes

(j) *(distributividade)* $A(B+C) = AB + AC$ e

$(B+C)A = BA + CA$;

(k) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

(l) $(A^t)^t = A$;

(m) $(A+B)^t = A^t + B^t$;

(n) $(\alpha A)^t = \alpha\, A^t$;

(o) $(AB)^t = B^t A^t$;

Álgebra Linear

Módulo I – Propriedades das matrizes

Ex.: Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Multiplicando AB e BA obtemos

$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, o que mostra que

$AB \neq BA$

Módulo I – Propriedades das matrizes

Vamos verificar se para matrizes A e B, quadradas, vale a igualdade

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

$$(A+B)(A-B) \;=\; (A+B)A + (A+B)(-B)$$

$$= AA + BA - AB - BB = A^2 + BA - AB - B^2$$

Assim, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se,

e somente se, $BA - AB = 0$, ou seja, $AB = BA$.

Álgebra Linear

Módulo I – Propriedades das matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Para estas matrizes

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^2 = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^2 - B^2.$$

Módulo I – Propriedades das matrizes

Aplicação: Cadeias de Markov: Vamos supor que uma população é dividida em três estados (por exemplo: ricos, classe média e pobres) e que em cada unidade de tempo a probabilidade de mudança de um estado para outro seja constante no tempo, só dependa dos estados. Este processo é chamado cadeia de Markov.

Seja *tij* a probabilidade de mudança do estado j para o estado i em uma unidade de tempo (geração). Tome cuidado com a ordem dos índices. A matriz

$$T = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

é chamada matriz de transição.

Álgebra Linear

Módulo I – Propriedades das matrizes

A distribuição da população inicial entre os três estados pode ser descrita pela seguinte matriz:

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{está no estado 1} \\ \text{está no estado 2} \\ \text{está no estado 3} \end{array}$$

A matriz P0 caracteriza a distribuição inicial da população entre os três estados e é chamada vetor de estado. Após uma unidade de tempo a população estará dividida entre os três estados da seguinte forma

$$P_1 = \begin{bmatrix} t_{11}p_1 + t_{12}p_2 + t_{13}p_3 \\ t_{21}p_1 + t_{22}p_2 + t_{23}p_3 \\ t_{31}p_1 + t_{32}p_2 + t_{33}p_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{estará no estado 1} \\ \text{estará no estado 2} \\ \text{estará no estado 3} \end{array}$$

Módulo I – Propriedades das matrizes

Exemplo: Vamos considerar a matriz de transição T e o vetor de estados inicial P_0 dados abaixo:

$$T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix} \qquad P_0 = \begin{bmatrix} 100.000 \\ 150.000 \\ 200.000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{está no } \text{Est } 1 \\ \textit{está no } \text{Est } 2 \\ \textit{está no } \text{Est } 3 \end{matrix}$$

Admitindo que a unidade de tempo seja de 10 anos, qual a situação da população após 30 anos? Considere os estados:

Est 1: ricos; Est 2: classe média; Est 3: pobres.

Álgebra Linear

Módulo I – Propriedades das matrizes

$$T\ P_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100.000 \\ 150.000 \\ 200.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 145.000 \\ 225.000 \\ 125.000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{está no}\ \mathrm{Est}\ 1 \\ \textit{está no}\ \mathrm{Est}\ 2 \\ \textit{está no}\ \mathrm{Est}\ 3 \end{matrix}$$

$$T^2 P_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 145.000 \\ 225.000 \\ 125.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 197.500 \\ 247.500 \\ 99.500 \end{bmatrix}$$

$$T^3 P_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 197.500 \\ 247.500 \\ 99.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 232.450 \\ 272.250 \\ 94.250 \end{bmatrix}$$

Módulo I – Tipo de matrizes

Matrizes Zero

Uma matriz com todos os seus elementos nulos.

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Módulo I – Propriedades da matriz nula

Propriedades:

(1) $A + 0 = 0 + A = A$

(2) $A – A = 0$

(3) $0 – A = – A$

(4) $A\,0 = 0\,A = 0$

Álgebra Linear

Módulo I – Matrizes, Identidade

Uma matriz quadrada com todos os seus elementos nulos para i ≠ j e iguais a 1 quando i = j.

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

(1) A I = I A = A

Módulo I – Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A, se pudermos encontrar uma matriz quadrada B de mesmo tamanho tal que AB = BA = I, então diremos que A é invertível e que B é uma inversa de A.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ é uma inversa de } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ pois}$$

Módulo I – Matriz inversa

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \qquad \text{e}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Módulo I – Matriz inversa

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz sem inversa pois

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $BA \neq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Módulo I – Matriz inversa

Propriedades:

(1) Se B e C são inversas da matriz A, então B = C

(2) A matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se ad – bc ≠ 0.

Neste caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(3) Se A e B são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

Propriedades:

(4) Se A é uma matriz invertível, então A^{-1} é invertível e

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(5) Se A é uma matriz invertível, então kA é invertível e

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

Ex.: Calcule as inversas das seguintes matrizes

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 3) $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Ex.: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine se A é invertível e, se for, encontre sua inversa.

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a \times 1 + b \times 0 = 1 \\ a \times 0 + b \times 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c \times 1 + d \times 0 = 0 \\ c \times 0 + d \times 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo I – Matriz inversa

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ b+c=0 \\ 1-b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ -b+c=-1 \end{cases}$$

$$2c=-1 \Rightarrow c=-0{,}5$$

$$b-0{,}5=0 \Rightarrow b=0{,}5$$

Irmãos em Perigo

Os que pretendem transformar o próximo, de um dia para outro, a golpes verbais.

Os que descobrem pareceres inteligentes e bons conselhos para todas as pessoas, distraídos dos problemas que lhes são próprios.

Os que colocam a mente em outro mundo, de maneira absoluta, sem atender aos deveres do mundo em que respiram.

Os que permanecem incessantemente preocupados em se defenderem.

Os que fazem dez projetos maravilhosos por dia sem concretizar nenhum deles em dez anos.

Os que reconhecem a grandeza das verdades divinas, mas que jamais dispõem de tempo para cultivá-las, em favor da própria iluminação.

Os que adiam indefinidamente para amanhã o serviço da compreensão e do amor ao próximo.

Os que se sentem senhores exclusivos de todos os trabalhos no campo da caridade, sem distribuir oportunidades de serviço aos outros.

Os que declaram perdoar a ofensa, mas que nunca conseguem esquecer o mal.

Os que encontram ensejo de se entediarem da vida.

* * * André Luiz. (Xavier, Francisco Cândido).